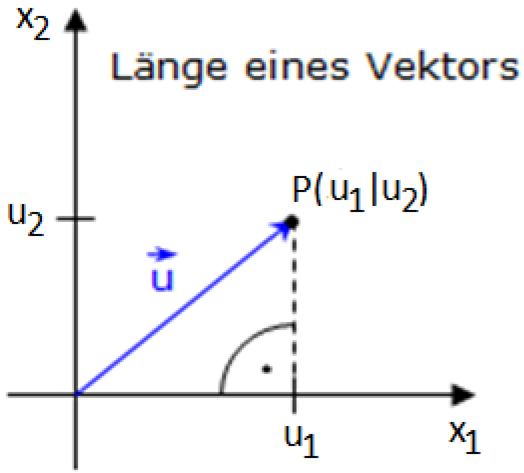
Längen

Die Länge eines Vektors ergibt sich aus folgender Formel:

$$|\vec{u}| = \left|\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

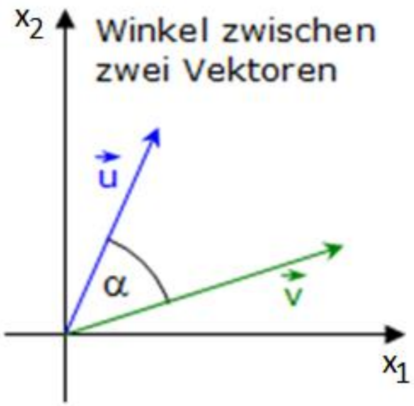


Im zweidimensionalen Fall lassen Sie einfach die dritte Koordinate weg. Das entspricht dem Satz des Pythagoras!

Winkel

Der Winkel zwischen zwei Vektoren wird wie folgt bestimmt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



Es spielt dabei keine Rolle, wo die Vektoren im Koordinatensystem liegen.

Die Vektoren werden so behandelt, als wären es Ortsvektoren, also so, als würden sie im Ursprung beginnen.

Hinweis: Achten Sie darauf, dass der GTR im Modus Degree arbeitet!

Orthogonale Vektoren

Aus der Winkelformel lässt sich ein Spezialfall ableiten.

Für $\alpha = 90°$ ist $\cos(\alpha) = 0$.

Damit bekommen wir ein Kriterium mit dem sich feststellen lässt, wann zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen, d.h. wann sie orthogonal sind.

Kriterium für orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ sind genau dann orthogonal,
wenn $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ist, d.h. wenn das Skalarprodukt 0 ist.

Rechenbeispiel

Bestimme die Längen der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und den Winkel dazwischen.

Lösung: $\underline{|\vec{a}|} = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = \underline{5}$

$$\underline{|\vec{b}|} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \underline{\sqrt{14}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 6$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{6}{5\sqrt{14}} \approx 0{,}3207 \Rightarrow \underline{\alpha \approx 71{,}3°}$$

GTR
2ND cos

Abstand zwischen zwei Punkten

Der Abstand zwischen P und Q ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$.

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} \right|$$

Daraus ergibt sich die folgende Formel:

$$d = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Rechenbeispiel

Bestimme den Abstand zwischen $A(0|-3|4)$ und $B(1|2|3)$.

Lösung:

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-(-3) \\ 3-4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{27} \approx 5{,}2$$

Ergebnis:

Der Abstand zwischen A und B beträgt etwa $\underline{5{,}2\ \mathrm{LE}}$.